Nafouz

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 10^n (u_0+1)-1$

حيث u_0 عدد طبيعي

ـ نعتبر المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ التالية: $61x - 39y = 38$

1) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) علما ان الثنائية $(23;35)$ حلا خاصا لها .

2) أ) بين ان : $u_{1982} \equiv u_0 [33]$

ب) بملاحظة ان: $10^{60} \equiv 1[61]$. بين ان $u_{1982} \equiv (39u_0 + 38)[61]$

ثم إستنتج ان : $u_{1982} \equiv 0[61]$ يكافئ $u_0 \equiv 35[61]$

3) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10^{7n} \equiv 10^n [70]$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10^{7^n} \equiv 10[70]$

4) في هذا السؤال نفرض ان: $u_0 = 0$.أنشر العدد 2019 وفق الأساس 7 ثم عين باقي u_{2019} على 70 .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر المستقيمان (D_1) و(D_2) المعرفان بتمثيلهما الوسطيان كما يلي:

$$(D_1):\begin{cases} x = m \\ y = m-1 \\ z = 1 \end{cases} ;m \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad (D_2):\begin{cases} x = -t+1 \\ y = t \\ z = -2t+4 \end{cases} ;t \in \mathbb{R}.$$

1) أ) بين أن (D_1) و (D_2) متعامدان و ليسا من نفس المستوي .

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) .

2) أ) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يحوي (D_1)والعمودي على (D_2) هي $x - y + 2z - 3 = 0$

ب) بين أن المستقيم (D_2) يقطع المستوي (P) في نقطة B يطلب تعيين إحداثياتها

3) بين أن المستقيم (D) الذي يشمل النقطة B و شعاع توجيهه $\vec{n}$ يقطع المستقيم (D_1) في النقطة $A(1;0;1)$

4) ليكن (Q) المستوي الذي يحوي (D_1) و يكون عموديا على (P) و M نقطة متغيرة على (D_2)

أ) ادرسا لوضع النسبي بين المستوي (Q) و المستقيم (D_2)

ب) استنتج المسافة بين M و (Q).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) عين العددين المركبين z_1 وz_2 حيث :
$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1+i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)z_1 - z_2 = (1-\sqrt{3})i \end{cases}$$

2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = 1-i$ و $z_B = 2+\sqrt{3}+i$

أ) أكتب z_A على الشكل الأسي .

ب) بين ان : $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم إستنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

3) أ) أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$

ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BD]$ مقدرة بوحدة المساحة.

ج) عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_D)$

4) لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C=1+i$.

ـ عين طبيعة المثلث ABC ثم استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

5) ليكن التحويل النقطي S المعرف كما يلي: $S=r\circ h$ مع h تحاكي مركزه O و نسبته -2

أ) عين طبيعة التحويل S مع تعيين خصائصه المميزة

ب) نعرف من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ ، التحويل النقطي H_n كما يلي: $H_n=\underbrace{S\circ S\circ\ldots\circ S}_{\text{n مرة}}$

ـ عين قيم n حتى يكون H_n تحاكي يطلب تعيين خصائصه.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) 1) لتكن الدالة u المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $u(t)=3\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}$

- عين اتجاه تغير الدالة u .

2) ليكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ :
$$\begin{cases} f(x)=x^3\left[\ln(1+x)-\ln x\right] & ;x\in]0;1] \\ f(0)=0 \end{cases}$$

أ) أثبت أن f قابلة للإشتقاق على يمين 0 .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;1]$ ، $f'(x)=x^2u\left(\frac{1}{x}\right)$

ج) عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

II) نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $[0;1]$ بـ : $g(x)=x^3\ln(x+1)$ و $\begin{cases} h(x)=x^3\ln x & ;x\in]0;1] \\ h(0)=0 \end{cases}$

و ليكن على الترتيب (C_f) ، (C_g) و (C_h) منحنيات الدوال f ، g و h في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

بحيث : $\|\vec{i}\|=4\ cm$

1) أ) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$: $f(x)=g(x)-h(x)$

ب) عين الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_g) .

2) ليكن (T) و (T') مماسين لـ (C_f) و (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{\frac{1}{3}}$ على الترتيب.

ـ أثبت أن (T) و (T') متوازيان .

3) أنشئ المنحنى (C_f)

4) لتكن H الدالة الأصلية الوحيدة لـ h على المجال $[0;1]$ و التي تنعدم عند 1 .

أ) ليكن $\alpha\in]0;1]$ و $A_\alpha=\int_\alpha^1 x^3\ln x\,dx$, عبر عن A_α بدلالة الدالة H

ب) أحسب A_α باستعمال التكامل بالتجزئة ثم أستنتج $H(0)$.

5) عين مساحة الحيز من المستوي المحددة بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=1$.

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) الاعداد و الحساب + المتتاليات العددية	التنقيط

1) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) :

لتكن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $61x-39y=38 \quad (1)$

بما الثنائية $(23;35)$ حل خاص لـ(E) نجد: $61(23)-39(35)=38 \quad (2)$

بطرح المعادلتين نجد: $61(x-23)=39(y-35)$

لدينا، 61 يقسم $61(x-23)$ منه نستنتج ان 61 يقسم $39(y-35)$ — 1ن

بما ان 61 و 39 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص نجد ان 61 يقسم $y-35$

وعليه نجد: $y=61k+35$ مع $k\in\mathbb{Z}$

- بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد: $x=39k+23$ مع $k\in\mathbb{Z}$

الخلاصة: حلول المعادلة (E) هي : $\boxed{S=\{(x;y)=(39k+23\,;\,61k+35)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}}$

2) أ) تبيان ان: $u_{1982}\equiv u_0[33]$:

لدينا، $u_{1982}=10^{1982}(u_0+1)$

لاحظ ان: $10^2\equiv 1[33]$ منه : $(10^2)^{991}\equiv 1[33]$ يكافئ $10^{1982}\equiv 1[33]$ — 0.5ن

يكافئ $10^{1982}(u_0+1)\equiv u_0+1[33]$

يكافئ $10^{1982}(u_0+1)-1\equiv u_0[33]$

يكافئ $u_{1982}\equiv u_0[33]$

ب) تبيان ان : $u_{1982}\equiv(39u_0+38)[61]$

بما ان: $10^{60}\equiv 1[61]$ منه $(10^{60})^{33}\equiv 1[61]$ اي $10^{1980}\equiv 1[61]$

منه $10^2\times10^{1980}\equiv 10^2[61]$ — 0.5ن

منه $10^{1982}\equiv 39[61]$

منه $10^{1982}(u_0+1)\equiv 39(u_0+1)[33]$

منه $u_{1982}\equiv 39u_0+38[33]$

- استنتاج ان: $u_{1982}\equiv 0[61]$ يكافئ $u_0\equiv 35[61]$:

الاستلزام الاول:

$u_{1982}\equiv 0[61]$ معناه $39u_0+38\equiv 0[61]$ اي $39u_0+38=61t$ مع $t\in\mathbb{Z}$ — 0.5ن

وعليه: $61t-39u_0=38$ منه الثنائية $(t;u_0)$ حل للمعادلة (E)

اذن نجد ان : $u_0=61k+35$ اي $u_0\equiv 35[61]$.

الاستلزام العكسي: اذا كان $u_0\equiv 35[61]$ معناه $u_0+1\equiv 36[61]$

بما ان $10^{1982}\equiv 39[61]$ نجد: $10^{1982}(u_0+1)\equiv 1404[61]$

منه $10^{1982}(u_0+1)\equiv 1[61]$

منه: $u_{1982}\equiv 0[61]$

3) أ) تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $10^{7n} \equiv 10^n [70]$:

لدينا، $10^7 \equiv 10[70]$ منه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $(10^7)^n \equiv 10^n [70]$ اي $10^{7n} \equiv 10^n [70]$

0.25

ب) البرهان بالتراجع:

نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $P(n):\ 10^{7^n} \equiv 10[70]$

المرحلة01: التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$: $10 \equiv 10[70]$ منه $P(0)$ محققة.

0.5ن

المرحلة02: من اجل n عدد طبيعي كيفي، نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة

$P(n+1):\ 10^{7^{n+1}} \equiv 10[70]$

لدينا ، $10^{7^{n+1}} = 10^{7(7^n)}$ منه حسب السؤال السابق، $10^{7(7^n)} \equiv 10^{7^n} [70]$

وحسب فرضية التراجع نجد: $10^{7^n} \equiv 10[70]$ نجد: $10^{7(7^n)} \equiv 10[70]$

منه: $10^{7^{n+1}} \equiv 10[70]$ اي $P(n+1)$ محققة.

الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n فان : $10^{7^n} \equiv 10[70]$.

4) نشر العدد 2019 وفق الاساس 7 :

لدينا،

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 7 \\ \boxed{3} \quad 288 & 7 \\ \boxed{1} \quad 41 & 7 \\ \boxed{6} \quad 5 & 7 \\ \boxed{5} \quad 0 & \end{array}$$

منه : $2019 = \overline{5613}^{(7)}$

0.25

تعيين باقي u_{2019} على 70 :

0.5

لدينا ، $u_{2019} = 10^{2019} - 1$. بما ان : $2019 = \overline{5613}^{(7)} = 3 + 7 + 6(7^2) + 5(7^3)$

منه : $10^{2019} = 10^{3+7+6(7^2)+5(7^3)} = 10^3 \times 10^7 \times 10^{6(7^2)} \times 10^{5(7^3)}$

حساب السؤال السابق نجد: $10^{2019} \equiv 10^3 \times 10 \times 10^6 \times 10^5 [70] \equiv 20[70]$ منه : $u_{2019} \equiv 19[70]$

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)	الهندسة الفضائية	التنقيط

1) أ) تبيان ان (D_1) و (D_2) متعامدان و ليسا من نفس المستوي:

لدينا، $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(-1;1;-2)$ اشعة توجيه المستقيمين (D_1) و (D_2) على الترتيب.

0.25

لدينا، $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \times -1) + (1 \times 1) + (0 \times -2) = -1 + 1 + 0 = 0$

منه: المستقيمين (D_1) و (D_2) متعامدين .

- تبيان ان (D_1) و (D_2) ليسا من نفس المستوي:

بما ان المستقيمين (D_1) و (D_2) متعامدين فانهما ليس من نفس المستوي او متقاطعين في نقطة

0.75

وحيدة $H(x;y;z)$ فهي تحقق $\begin{cases} H \in (D_1) \\ H \in (D_2) \end{cases}$ اي $\begin{cases} -t+1 = m & ...(1) \\ t = m-1 & ...(2) \end{cases}$

بحل الجملة (1) و (2) نجد: $t=0$ و $m=1$

- من اجل $t=0$ نجد: $H(1;0;4)$ ومن اجل $m=1$ نجد: $H(1;0;1)$

بما النقطة H ليست وحيدة فان المستقيمين (D_1) و (D_2) ليسا من نفس المستوي.

ب) التحقق ان $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) :

0.5 لدينا، $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(-1;1;-2)$ اشعة توجيه المستقيمين (D_1) و (D_2) على الترتيب.

بما ان : $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{n}=(-1\times1)+(1\times1)+(1\times0)=-1+1+0=0 \\ \vec{v}\cdot\vec{n}=(-1\times-1)+(1\times1)+(1\times-2)=1+1-2=0 \end{cases}$

منه: $\vec{n}(-1;1;1)$ هو شعاع عمودي على (D_1) و (D_2) .

2) أ) المعادلة الديكارتية للمستوي (P) :

0.75 بما المستقيم (D_2) عمودي على المستوي (P) فان $\vec{v}(-1;1;-2)$ شعاع ناظمي لـ (P)

و عليه المعادلة الديكارتية للمستوي (P) من الشكل: $-x+y-2z+d=0$

-لتكن $A(1;0;1)$ نقطة من (D_1) فان $A\in(P)$ لان (D_1) محتوى في المستوي (P)

منه: $-x_A+y_A-2z_A+d=0$ اي $-1-2+d=0$ منه: $d=3$

الخلاصة: المعادلة الديكارتية لـ (P) هي $-x+y-2z+3=0$ اي $\boxed{x-y+2z-3=0}$.

ب) دراسة الوضع النسبي بين (D_2) و (P) :

بما ان المستقيم (D_2) عمودي على المستوي (P) فانهما متقاطعان وفق نقطة وحيدة

0.5 $B(x;y;z)$ تحقق : $\begin{cases} B\in(D_2) \\ B\in(P) \end{cases}$ اي : $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \\ z=-2t+4 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$ منه: $-t+1-t-4t+8-3=0$

منه: $-6t+6=0$ منه: $t=1$ و عليه نجد: $B(0;1;2)$

3) دراسة تقاطع (D) مع (D_1) : التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل B و موجه

0.5 باشعاع $\vec{n}(-1;1;1)$ يكتب على الشكل: $\begin{cases} x=-k \\ y=1+k \\ z=2+k \end{cases} \quad / \ k\in\mathbb{R}$

من اجل الثنائية: $(m;k)=(1;-1)$ نجد ان النقطة $A\in(D)$ و $A\in(D_1)$

منه: $(D)\cap(D_1)=\{A\}$.

4) أ) الوضع النسبي بين (Q) و (D_2) :

بما ان المستوي (Q) و المستقيم (D_2) عموديان على (P) نستنتج ان:

0.5 - (D_2) و (Q) متوازيان او (D_2) محتوي في (Q)

- لدينا، $B\in(D_2)$ وبما $B\notin(D_1)$ اي $B\notin(Q)$ و عليه (D_2) و (Q) متوازيان تماما

ب) استنتاج $d(M;(Q))$:

0.25 $$d(M;(Q))=AB=\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{3}$$

تصحيح التمرين الثالث (05نقاط) الاعداد المركبة	التنقيط
1) تعيين العددين z_1 ، z_2 :	
لدينا ، $\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}\\(\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}\\(-2+i\sqrt{3})z_1-iz_2=-1+\sqrt{3}\end{cases}$	0.5
بالجمع نجد: $i\sqrt{3}z_1=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ اي $\boxed{z_1=1-i}$.	
بتعويض قيمة z_1 نجد ان : $\boxed{z_2=2+\sqrt{3}+i}$.	
2) أ) كتابة z_A على الشكل الأسي: لدينا ، $\lvert z_A\rvert=\sqrt{2}$ و $\arg(z_A)=-\frac{\pi}{4}$ منه: $\boxed{z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$	0.25
ب) تبيان ان : $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}}$: لدينا،	
$\frac{z_B}{z_A}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}=\frac{2+2i+\sqrt{3}+\sqrt{3}i+i-1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3})}{2}$	0.25
$=(1+\sqrt{3})\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$	
استنتاج الشكل الاسي لـ z_B :	
لدينا: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ منه: $z_B=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}z_A=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\boxed{(\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}}}$	0.25
3) أ) ايجاد لاحقة النقطة D :	
D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O و زاوية $-\frac{\pi}{6}$ معناه: $r(B)=D$	
منه: $z_D=e^{-\frac{\pi}{6}i}z_B$ و عليه: $z_D=e^{-\frac{\pi}{6}i}(\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}}=\boxed{(\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{-\frac{\pi}{12}i}}$.	0.5
الاستنتاج: $\boxed{z_D=\overline{z_B}}$	
ب) مساحة الدائرة (γ) :	
لتكن S مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BD]$ منه: $S=\pi\frac{BD}{2}=\frac{\pi}{2}\lvert z_B-z_D\rvert$	0.5
بما ان $z_D=\overline{z_B}$ فان $z_B\quad z_D=2\mathrm{Im}(z_B)=2i$ منه: $\boxed{S=\pi\ u.a}$	
ج) تعيين مجموعة النقط:	
لدينا، $\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_D)$ تكافئ $2\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)+2\pi k$	
تكافئ $\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+\pi k$	
تكافئ $(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{12}+\pi k$ مع $k\in\mathbb{Z}$.	0.75
منه مجموعة النقط (Δ) هي المستقيم الموجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $(\vec{u};\vec{w})=\frac{\pi}{12}$ و المار من النقطة B و لا يشملهـــــا .	

	التنقيط
4)أ) طبيعة المثلث ABC : لدينا، $K=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2+\sqrt{3}+i-1-i}{1-i-1-i}=\frac{1+\sqrt{3}}{-2i}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$	0.25
منه: $\lvert K\rvert=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ و $\arg(K)=\frac{\pi}{2}$ اذن: $BC\neq AC$ و $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{2}$ منه المثلث ABC قائم في C ب) طبيعة الرباعي ACBD : لدينا، $\begin{vmatrix} z_C-z_A=2i \\ z_B-z_D=2i \end{vmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ اذن الرباعي ACBD متوازي اضلاع	0.5
بما ام المثلث ABC قائم في C نجد ان هناك ضلعان متتاليان من الرباعي ACBD متعامدان و ليس متساويان منه نستنتج ان ACBD مستطيل . 5) أ) طبيعة التحويل S : r دوران مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$: منه r هو تشابه مباشر مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{6}$ و نسبته 1 h تحاكي مركزه O و نسبته -2 منه h هو تشابه مباشر مركزه O و زاويته π و نسبته 2 إذن: التحويل $S=r\circ h$ هو تشابه مباشر مركزه O و نسبته 2 و زاويته $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$	0.75
ب) تعين قيم n : لدينا، $H_n=S\circ S\circ\ldots\circ S$ هو تشابه مباشر مركزه O و نسبته 2^n و زاويته $\frac{5\pi n}{6}$ H_n يكون تحاكي اذا كان $5n\equiv 0[6]$ اي $n\equiv 0[6]$ اي $\boxed{n=6\alpha\ \ /\alpha\in\mathbb{N}}$.	0.25
تعيين الخصائص: اذا كان: α عدد زوجي فان H_n تحاكي مركزه O و نسبته 2^n اذا كان: α عدد فردي فان H_n تحاكي مركزه O و نسبته -2^n	0.25
تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) الدوال العددية : الدالة اللوغارتمية	التنقيط
I) 1) تعيين و اتجاه تغير الدالة u : لدينا من اجل كل عدد حقيقي t من $]0;+\infty[$: $u'(t)=\frac{3}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}=\frac{3(t+1)-1}{(t+1)^2}=\frac{3t+2}{(t+1)^2}$ من اجل من اجل كل عدد حقيقي t من $]0;+\infty[$: $u'(t)>0$ منه u دالة متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.	0.5
2) أ) إثبات ان f قابلة للاشتقاق على يمين العدد 0 : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^3[\ln(1+x)-\ln x]}{x}$ $=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^2[\ln(1+x)-\ln x]$ $=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^2\ln(1+x)-x^2\ln x$ $=0$ منه: f دالة قابلة للإشتقاق على يمين العدد 0 و عدد المشتق $f'_d(0)=0$	0.5

<table>
<tr>
<td>0.5</td>
<td>

ب) حساب $f'(x)$:من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1]$:

$$f'(x)=3x^2\left[\ln(x+1)-\ln x\right]+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)x^3$$
$$=x^2\left[3\left(\ln(x+1)-\ln x\right)+\frac{x}{x+1}-1\right]$$
$$=x^2\left[3\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$$
$$=x^2u\left(\frac{1}{x}\right)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>0.5</td>
<td>

ج) إتجاه تغير الدالة f :

لدينا من اجل كل x من $]0;1]$ فان $\frac{1}{x}\geq 1$ منه $u\left(\frac{1}{x}\right)\geq u(1)$ اي $u\left(\frac{1}{x}\right)>0$

منه من اجل كل x من $]0;1]$ نجد: $f'(x)>0$

إذن f دالة متزايدة تماما على المجال $]0;1]$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>0.25</td>
<td>

- جدول التغيرات:

x	0 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow \ln 2$

</td>
</tr>
<tr>
<td>0.25</td>
<td>

II) 1) أ) التحقق ان : $f(x)=g(x)-h(x)$:

من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1]$:

$$f(x)=x^3\left[\ln(x+1)-\ln(x)\right]=x^3\ln(x+1)-x^3\ln x=g(x)-h(x)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>0.75</td>
<td>

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (C_g) :

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1]$: $f(x)-g(x)=-h(x)$

بما ان $h(x)<0$ على المجال $]0;1]$ منه نجد:

x	0		1
x^3	0	$+$	0
$\ln x$	$\|$	$-$	0
$-h(x)$	0	$+$	0

إذن: (C_f) يقع فوق (C_g) على المجال $]0;1[$.

(C_f) و (C_g) يتقطعان في النقطتين $A(1;\ln 2)$ و O .

</td>
</tr>
<tr>
<td>0.5</td>
<td>

2) إثبات ان (T) و (T') متوازيان :

(T) و (T') مماسين لـ (C_f) و (C_g) عند $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب

معامل توجيههما على التوالي $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$, $g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$

لدينا، من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;1]$: $f(x)-g(x)=h(x)$

منه: $f'(x)-g'(x)=h'(x)=x^2(3\ln x-1)$

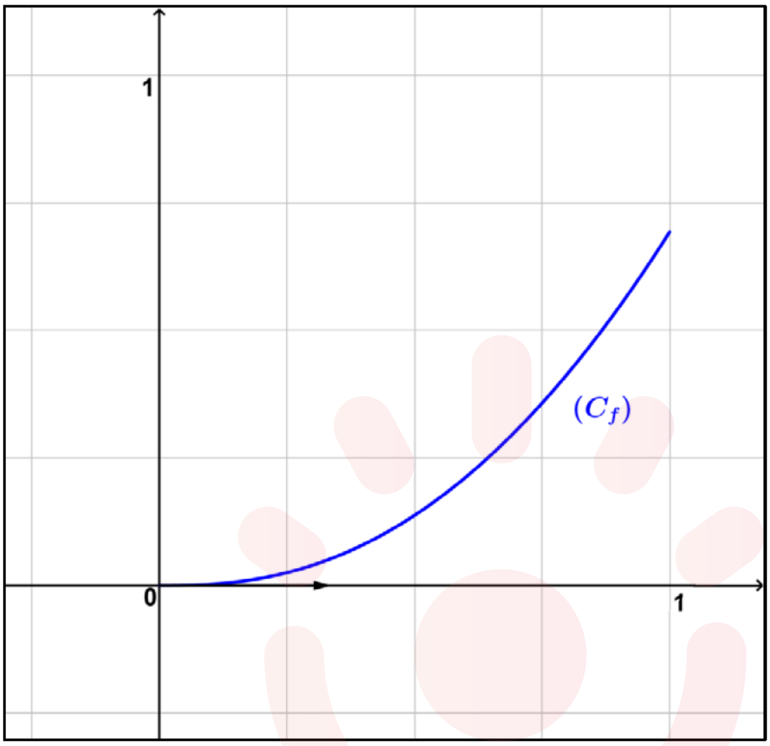
و عليه: $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)-g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=0$ اي $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$

وعليه (T) و (T') متوازيان .

</td>
</tr>
</table>

3) إنشاء (C_f) :

0.75



4) أ) التعبير عن A_α بدلالة الدالة H :

0.5

$$A_\alpha=\int_\alpha^1 x^3\ln x\,dx=\int_\alpha^1 h(x)dx=[H(x)]_\alpha^1=H(1)-H(\alpha)=-H(\alpha)$$

ب) حساب A_α باستعمال التكامل بالتجزئة :

0.75

نضع: $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=x^3 \end{cases}$ منه: $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=\dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$A_\alpha=\left[\frac{x^4\ln x}{4}\right]_\alpha^1-\frac{1}{4}\int_\alpha^1 x^3\,dx=\left(0-\frac{\alpha^4\ln\alpha}{4}\right)-\frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_\alpha^1=-\left[\frac{\alpha^4\ln\alpha}{4}+\frac{1}{16}\left(1-\alpha^4\right)\right]$$

استنتاج $H(0)$:

0.5

حساب السؤالين السابقين نستنتج ان: $H(\alpha)=\dfrac{\alpha^4\ln\alpha}{4}+\dfrac{1}{16}\left(1-\alpha^4\right)$

منه: $H(0)=\lim\limits_{\alpha\to 0} H(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha^4\ln\alpha}{4}+\dfrac{1}{16}\left(1-\alpha^4\right)=\dfrac{1}{16}$

5) حساب المساحة:

0.5

$$S=\int_0^1[f(x)-g(x)]dx=-\int_0^1 h(x)dx=-[H(x)]_0^1=H(0)-H(1)=\boxed{\frac{1}{16}\ u.a}$$

0.25

بما ان : $u.a=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=16cm^2$ نجد ان : $\boxed{S=1\ cm^2}$.